Έκτο τεστ Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

(i) Να αποδείξετε ότι $\int_\gamma |z|\overline{z}dz = r^3\pi i$, όπου η $\gamma = [-r, r]\cup\gamma_r$, με $[-r, r]$ να είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $-r$ και πέρας το r και γ_r το θετικά παραμετρικοποιημένο άνω ημικύκλιο κέντρου 0 και ακτίνας r.

(ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $Re(z_1), Re(z_2) \leq 0$ ισχύει:

$$|e^{z_1} - e^{z_2}| \leq |z_1 - z_2|.$$

(iii) Να αποδείξετε ότι κάθε δίσκος $D(a, r)$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και επίσης ότι το

$$A = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq Re^2(z) \ \text{ ή } \ Im(z) \leq -Re^2(z)\}$$

είναι αστερόμορφο υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Θέμα 2

Έστω $a \in \mathbb{C}$, ένας ανοιχτός δίσκος $D(a, r)$, $r > 0$, ένα $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}(a, r)$ και η συνάρτηση $f\colon \partial D(a, r) \to \mathbb{C}$ με

$$f(w) = \frac{1}{w - z}, \ w \in \partial D(a, r).$$

(i) Να αποδείξετε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - a)^n}{(z - a)^{n+1}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση $-f$.

(ii) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial D(a,r)} \frac{dz}{(z - a)^n}$, όπου $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Με χρήση των ζητημάτων (i) και (ii), να αποδείξετε ότι $\delta_{\partial D(a,r)}(z) = 0$, όπου

$$\delta_{\partial D(a,r)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{dw}{w - z} \quad (\text{Δείκτης στροφής της } \gamma \text{ στο } z).$$

Θέμα 3

(i) Να εξετάστε αν οι συναρτήσεις $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $g(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ και $h(z) = ze^z$, $z \in \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμες και σε όποιες απο αυτές απαντήσετε καταφατικά να δώσετε μια παράγουσα.

(ii) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial D(0,1)} \frac{e^z}{\overline{z}}$.

(iii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$e^{f(z)} = z, \ \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

(Δηλαδή στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ δεν μπορεί να ορισθεί ολόμορφος κλάδος για το λογάριθμο).

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!